U skupu skoro svuda ograničenih funkcije $L^\infty(X)$ takođe uvodimo relaciju ekvivalencije (identifikujemo funkcije koje su jednake skoro svuda), i definišemo normu sa:

$$\|f\|_\infty = \text{esssup}\, f, \quad f \in L^\infty(X).$$

Lema 8.2. Ako je $f \in L^\infty(X)$, tada $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ za skoro svako $x \in X$. Štaviše, ako $M < \|f\|_\infty$, tada postoji merljiv skup $E \subseteq X$ takav da je $\mu(E) > 0$ i $|f(x)| \geq M$, $x \in E$.

Dokaz: Sledi direktno iz definicije i osobina supremuma i infimuma. ■

Lako se proverava da je $\|\cdot\|_\infty$ dobro definisano i da zadovoljava aksiome norme.

Očigledno važi $\|f\|_\infty \geq 0$ i $\|0\|_\infty = 0$. Neka je $\|f\|_\infty = 0$. Tada postoji skup $N_k \in \mathcal{M}$ čija je mera 0, takav da je $| f(x) | \leq \frac{1}{k}$ za $x \notin N_k$. Ako je $N = \bigcup_{k=1}^\infty N_k$, onda $N \in \mathcal{M}, \mu(N) = 0$ i $| f(x) | = 0$ za sve $x \notin N$. Odatle $f(x) = 0$ skoro svuda na X.

Osobina $\|\alpha f\|_\infty = | \alpha | \, \|f\|_\infty$ sledi direktno iz osobina supremuma i infimuma.

Ako $f, g \in L^\infty$, tada na osnovu prethodne leme postoje skupovi $N_1, N_2 \in \mathcal{M}$ takvi da je $\mu(N_1) = \mu(N_2) = 0$ i da važi $| f(x) | \leq \|f\|_\infty$ za $x \notin N_1$ $| g(x) | \leq \|g\|_\infty$ za $x \notin N_2$. Otuda je

$$| f(x) + g(x) | \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ za sve } x \notin N_1 \cup N_2$$

pa je i $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Napomena. Alternativni način da se zapiše $\|\cdot\|_\infty$ norma jeste

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \geq 0 : \ \mu(\{x \in X : \ |f(x)| > C\}) = 0\}.$$

Kako je $\{x \in X : \ |f(x)| > C\} = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$, gde je $E_n = \{x \in X : \ |f(x)| > C + \frac{1}{n}\}$, na osnovu Teoreme 2.1 sledi da se infimum dostiže (i u tom slučaju je $\|f\|_\infty = C$) ako je $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$.

Teorema 8.2. Prostor $(L^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ je kompletan normirani prostor.

Dokaz: Neka je $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ Košijev niz u $L^\infty(X)$ i $M \in \mathcal{M}, \mu(M) = 0$ takav da je

$$| f_n(x) | \leq \|f_n\|_\infty, \quad x \notin M, \ n = 1, 2, \ldots$$
$$| f_n(x) - f_m(x) | \leq \|f_n - f_m\|_\infty, \quad x \notin M, \ n, m = 1, 2, \ldots$$

Tada niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ uniformno konvergira na $X \setminus M$ ka funkciji

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x), & x \notin M \\ 0, & x \in M \end{cases}.$$

Odatle sledi da je f merljiva funkcija i vidi se da $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. ■